МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ІВАНА ПУЛЮЯ

Кафедра вищої математики

Практичні заняття
із
ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Частина 2: векторна алгебра

ТЕРНОПІЛЬ
2014 р.

УДК 517.2
ББК 22.161.6
Г12

Укладач
Г. В. Габрусєв

Рецензент
Лотоцький В. А.,
к.ф.-м.н., доц., зав. каф. математики
і методики її навчання ТНПУ ім. В. Гнатюка

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики.
Протокол № 8 від «27» лютого 2014 р.

Схвалено та рекомендовано до друку науково-методичною радою
Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя.
Протокол № 6 від «13» березня 2014 р.

Г12 Г.В. Габрусєв. Практичні заняття із вищої математики (частина 2 : векторна алгебра) – Тернопіль : Вид-во ТНТУ імені Івана Пулюя, 2014. – 37 с.

ЗМІСТ

Тема 1. Вектори і лінійні дії з ними. Проекція вектора на вісь. Базис. Системи координат. Вектори в системі координат. Поділ відрізка в даному відношенні

Задача 1. Для яких ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконується умова $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$?

Розв'язання. Якщо на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, віднесених до спільного початку, побудувати паралелограм, то вектор $\vec{a}+\vec{b}$ напрямлений по діагоналі, яка виходить з цього спільного початку, і $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ дорівнює довжині цієї діагоналі, а вектор $\vec{a}-\vec{b}$ напрямлений по другій діагоналі паралелограма і також $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ дорівнює довжині цієї другої діагоналі. Оскільки діагоналі прямокутника мають однакову довжину, то вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ повинні бути перпендикулярними.

Задача 2. Для яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вектор $\vec{a}+\vec{b}$ ділить кут між цими векторами навпіл?

Розв'язання. Оскільки діагональ ромба ділить кут між сторонами ромба навпіл, то паралелограм, побудований на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, повинен перетворитися в ромб. А це буде тоді, коли $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|$.

Задача 3. Нехай $ABCD$ – паралелограм, M і N – середини його сторін (рис. 2.10). Розкласти вектор $\overrightarrow{DC}$ за векторами $\vec{a} = \overrightarrow{AM}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AN}$.

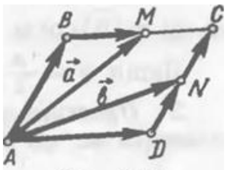

Рис. 2.10

Розв'язання. З трикутників AND і AMB маємо $\vec{b} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$, $\vec{a} = \overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

Якщо з першої рівності знайти вектор $\overrightarrow{AD}$ і підставити його значення в другу, дістанемо

$$\vec{a} = \overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\left(\vec{b} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\right) = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\vec{b}, \ \overrightarrow{DC} = \frac{4}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}.$$

Отже, якщо базисними векторами є вектори $\vec{a} = \overrightarrow{AM}$ і $\vec{b} = \overrightarrow{AN}$, то координатами вектора $\overrightarrow{DC}$ в цьому базисі є числа $\frac{4}{3}$ і $-\frac{2}{3}$.

Задача 4.

а). На координатній прямій Ox побудувати точки: $A_1(3)$, $A_2(-2)$.

б). У прямокутній системі координат Oxy побудувати точки $B_1(1;2)$, $B_2(2;-3)$, $B_3(-3;0)$.

в). У прямокутній системі координат $Oxyz$ побудувати точки $C_1(1;2;3)$, $C_2(3;-2;3)$, $C_3(-1;-3;-5)$.

Побудову точок показано на рис. 2.19, *а – в*.

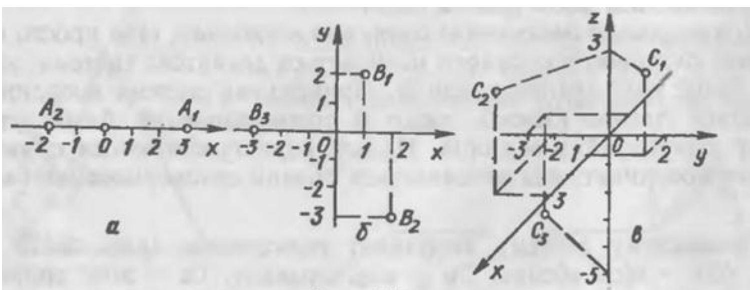

Рис. 2.19

Задача 5. Побудувати точки за полярними координатами: $A\left(3;\frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(2;\frac{3}{2}\pi\right)$, $C\left(4;\frac{5}{6}\pi\right)$.

Дані точки показано на рис. 2.22.

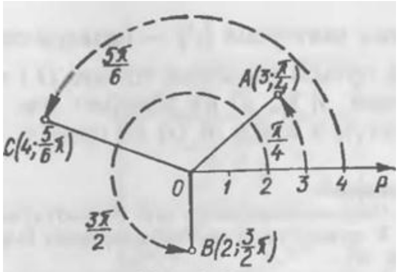

Рис. 2.22

Задача 6. В системі Oxy точка M має координати $(2;4)$. Знайти її координати в системі OXY, яка утворюється з системи Oxy поворотом на кут $\frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. За формулами $X = x\cos\alpha + y\sin\alpha$, $Y = -x\sin\alpha + y\cos\alpha$ маємо

$$X = 2\cos\frac{\pi}{2} + 4\sin\frac{\pi}{2} = 4,\ Y = -2\sin\frac{\pi}{2} + 4\cos\frac{\pi}{2} = -2.$$

Такий самий результат можна дістати геометрично, побудувавши точку M і системи координат Oxy і OXY.

Задача 7. Задано точки $A(0;-1;2)$ і $B(-1;1;4)$. Знайти координати, довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AB}$.

Розв'язання. З формул $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ і $\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$, $\cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}$, $\cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$ маємо $\overrightarrow{AB} = (-1;2;2)$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1+4+4} = 3$; $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, $\cos\beta = \cos\gamma = \frac{2}{3}$.

Задача 8. Чи може вектор утворювати з осями координат кути $\alpha = \beta = 60^0$, $\gamma = 30^0$?

Розв'язання. $\cos^2 60^0 + \cos^2 60^0 + \cos^2 30^0 = \frac{5}{4} \neq 1$, тому згідно з формулою $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ одержимо на це запитання негативну відповідь.

Задача 9. Вектор $\vec{a}$ утворює з осями координат гострі кути α, β, γ, причому $\alpha = 45^0, \beta = 60^0$. Знайти його координати, якщо $|\vec{a}| = 4$.

Розв'язання. Оскільки $\cos^2 45^0 + \cos^2 60^0 + \cos^2\gamma = 1$, то $\cos^2\gamma = 1 - \cos^2 45^0 - \cos^2 60^0 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. За умовою задачі кут γ гострий, тому $\cos\gamma = \frac{1}{2}$ і кут $\gamma = 60^0$.

Координати вектора $\vec{a}$ обчислюємо за формулами: $a_x = |\vec{a}|\cos\alpha$, $a_y = |\vec{a}|\cos\beta$, $a_z = |\vec{a}|\cos\gamma$.

$a_x = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$; $a_y = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$; $a_z = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$.

Отже, $\vec{a} = \left(2\sqrt{2}; 2; 2\right)$.

Задача 10. Знайти вектор $\vec{a} = \left(a_x; -1; a_z\right)$, колінеарний вектору $\vec{b} = (1; -2; 3)$.

Розв'язання. З умови $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$ маємо $\frac{1}{a_x} = \frac{-2}{-1} = \frac{3}{a_z}$; $a_x = \frac{1}{2}$, $a_z = \frac{3}{2}$.

Задача 11. Довести, що координати орта $\vec{a}_0$ вектора $\vec{a} = \left(a_x; a_y; a_z\right)$ збігаються з напрямними косинусами даного вектора.

Розв'язання. $\vec{a}_0 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \dfrac{1}{|\vec{a}|}\left(a_x; a_y; a_z\right) = \left(\dfrac{a_x}{|\vec{a}|}; \dfrac{a_y}{|\vec{a}|}; \dfrac{a_z}{|\vec{a}|}\right) = \left(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\right)$.

Задача 12. Вектори $\vec{a} = (2; -3; 6)$ та $\vec{b} = (-1; 2; -2)$ прикладені до однієї точки. Знайти одиничний вектор $\vec{c}_0$, який прикладений до цієї ж точки і напрямлений по бісектрисі кута, утвореного векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Розв'язання. Враховуючи розв'язок задачі 2, візьмемо одиничні вектори $\vec{a}_0$ та $\vec{b}_0$ і знайдемо вектор $\vec{c} = \vec{a}_0 + \vec{b}_0$. Оскільки $\left|\vec{a}_0\right| = \left|\vec{b}_0\right| = 1$, то вектор $\vec{c}$ буде напрямлений по бісектрисі кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7;$$

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3;$$

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{2}{7}; -\frac{3}{7}; \frac{6}{7}\right),\ \vec{b}_0 = \frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|} = \left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right);$$

$$\vec{c} = \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{3}; -\frac{3}{7} + \frac{2}{3}; \frac{6}{7} - \frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{1}{21}; \frac{5}{21}; \frac{4}{21}\right).$$

Шуканий вектор $\vec{c}_0$ знаходимо за формулою:

$$\vec{c}_0 = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}.\ |\vec{c}| = \sqrt{\frac{1 + 25 + 16}{21^2}} = \frac{\sqrt{42}}{21}.$$

Таким чином, $\vec{c}_0 = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{42}}; \dfrac{5}{\sqrt{42}}; \dfrac{4}{\sqrt{42}}\right)$.

Задача 13. Знайти центр маси однорідної трикутної пластинки з вершинами $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$, $M_3(x_3;y_3)$.

Розв'язання. Центр маси однорідної трикутної пластинки міститься в точці перетину медіан трикутника.

Нехай з вершини M_3 проведена медіана M_3N, де точка N – середина відрізка M_1M_2.

$$x_N = \frac{x_1 + x_2}{2},\; y_N = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Точка C перетину медіан ділить кожну медіану у відношенні $2:1$, рахуючи від вершини трикутника, тобто точка C ділить медіану M_3N у відношенні $\lambda = 2$.

Координати точки C обчислимо за формулами:

$$x_C = \frac{x_{M_3} + \lambda x_N}{1+\lambda},\; y_C = \frac{y_{M_3} + \lambda y_N}{1+\lambda}.$$

Отже,

$$x_C = \frac{x_3 + 2\frac{x_1 + x_2}{2}}{1+2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},$$

$$y_C = \frac{y_3 + 2\frac{y_1 + y_2}{2}}{1+2} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Таким чином, центр маси заданої трикутної пластинки міститься в точці $C\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$.

Тема 2. Скалярний добуток двох векторів, його властивості, механічний зміст, обчислення та застосування

Задача 1. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{m} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ і $\vec{n} = 4\vec{a} + 5\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

Розв'язання. Користуючись властивостями скалярного добутку, маємо

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = \left(2\vec{a} - 3\vec{b}\right) \cdot \left(4\vec{a} + 5\vec{b}\right) =$$

$$8\vec{a}^2 + 10\vec{a} \cdot \vec{b} - 12\vec{a} \cdot \vec{b} - 15\vec{b}^2 = 8\vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 15\vec{b}^2.$$

Застосовуючи формули $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$ і $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, знаходимо

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = 8 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} - 15 \cdot 2^2 = -54.$$

Задача 2. Знайти довжину вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 4$, $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

Розв'язання. За формулою $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$ отримаємо

$$|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c}^2} = \sqrt{\left(2\vec{a} - 3\vec{b}\right)^2} = \sqrt{4\vec{a}^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2} = \sqrt{124} = 2\sqrt{31}.$$

Задача 3. Обчислити роботу, що виконує сила $\vec{F}=(2;-1;4)$, яка прямолінійно переміщує матеріальну точку з точки $M(-1;0;3)$ в точку $N(2;-3;5)$.

Розв'язання. Знайдемо вектор переміщення $\vec{S}=\overrightarrow{MN}=(3;-3;2)$, тоді за формулами $A=\vec{F}\cdot\vec{S}$ і $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z$ робота $A=\vec{F}\cdot\vec{S}=17$.

Задача 4. Задані вектори $\vec{a}=(2;0;-2)$ і $\vec{b}=(-2;1;2)$. Знайти проекцію вектора $\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$ на вектор $\vec{b}$.

Розв'язання. Знайдемо координати вектора $\vec{c}$:

$$\vec{c}=2\left(2\vec{i}-2\vec{k}\right)+\left(-2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}\right)=2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}=(2;1;-2).$$

З формул $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\,\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z$ і $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$ одержимо

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{c}=\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|}=\frac{2\cdot(-2)+1\cdot1+(-2)\cdot2}{\sqrt{4+1+4}}=-\frac{7}{3}.$$

Задача 5. Знайти проекцію вектора $\vec{a}=(2;-3;4)$ на вісь l, яка утворює з координатними осями рівні гострі кути.

Розв'язання. Оскільки $\alpha=\beta=\gamma$, то з формули $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ отримуємо $3\cos^2\alpha=1$, $\cos^2\alpha=\frac{1}{3}$, $\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. За умовою задачі кут α гострий, тому $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Одиничний вектор осі l має координати:

$$\vec{l}_0=\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right);$$

$$\text{пр}_l\,\vec{a}=\text{пр}_{\vec{l}_0}\,\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{l}_0}{\left|\vec{l}_0\right|}=\vec{a}\cdot\vec{l}_0=\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{3}{\sqrt{3}}+\frac{4}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$$

Задача 6. Трикутник заданий вершинами $A(0;-1;2)$, $B(-1;-2;7)$, $C(1;-2;6)$. Знайти його внутрішній кут при вершині A.

Розв'язання. Користуючись формулою $\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$, будемо мати

$\overrightarrow{AB}=(-1;-1;5)$, $\overrightarrow{AC}=(1;-1;4)$, $\cos\varphi=\cos\left(\overrightarrow{AB}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AC}\right)=\frac{20}{9\sqrt{6}}\approx 0{,}91$, $\varphi\approx 25^0$.

Задача 7. Дано вектори $\vec{a}=(1;2;1)$, $\vec{b}=(-2;3;3)$, $\vec{c}=(3;-2;-4)$. Знайти координати вектора $\vec{d}$, який перпендикулярний до вектора $\vec{a}$ і задовольняє умови: $\vec{d}\cdot\vec{b}=-1$, $\vec{d}\cdot\vec{c}=-4$.

Розв'язання. Нехай x, y, z – невідомі координати вектора $\vec{d}$. Застосуємо умову перпендикулярності двох векторів та формулу для обчислення скалярного добутку векторів:

$$\begin{cases} x+2y+z=0; \\ -2x+3y+3z=-1; \\ 3x-2y-4z=-4. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему, наприклад, методом Гаусса.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & -1 \\ 0 & -8 & -7 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & -8 & -7 & -4 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 9 & 36 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Одержали еквівалентну систему:

$$\begin{cases} x+2y+z=0; \\ -y-2z=-5; \\ z=4, \end{cases}$$

розв'язок якої $x=2, y=-3, z=4$. Отже, $\vec{d}=(2;-3;4)$.

Тема 3. Векторний та мішаний добутки векторів, їхні властивості, геометричний зміст, обчислення та застосування

Задача 1. Обчислити $\left|\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\right|$, якщо $|\vec{a}|=3$, $\left|\vec{b}\right|=4$, $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

Розв'язання. $\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)=3(\vec{a}\times\vec{a})-6\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)+2\left(\vec{b}\times\vec{b}\right)=$

$$=-6\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)+\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=-5\left(\vec{a}\times\vec{b}\right);\ \left|-5\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right|=5|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\sin\frac{\pi}{2}=5\cdot3\cdot4\cdot1=60.$$

Задача 2. Знайти площу трикутника, заданого вершинами $A(1;2;0)$, $B(0;-2;1)$, $C(-1;0;2)$.

Розв'язання. Площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Оскільки $\overrightarrow{AB}=(-1;-4;1)$, $\overrightarrow{AC}=(-2;-2;2)$ і за формулою $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -4 & 1\\ -2 & -2 & 2\end{vmatrix}=-6\vec{i}-6\vec{k},$$

то за формулою $S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ площа $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{6^2+6^2}=3\sqrt{2}$.

Задача 3. Знайти момент сили $\vec{F}=(1;-2;4)$, прикладеної до точки $A(1;2;3)$, відносно точки $B(3;2;-1)$.

Розв'язання. Згідно з формулою $\vec{M}=\overrightarrow{OA}\times\vec{F}$ момент сили $\vec{M}=\overrightarrow{BA}\times\vec{F}$. Оскільки $\overrightarrow{BA}=(-2;0;4)$, то

$$\vec{M}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 0 & 4\\ 1 & -2 & 4\end{vmatrix}=8\vec{i}+12\vec{j}+4\vec{k}.$$

Задача 4. Знайти одиничний вектор $\vec{p}_0$, який перпендикулярний до векторів $\vec{a}=(1;3;0)$ і $\vec{b}=(2;-3;6)$.

Розв'язання. Оскільки векторний добуток $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ – це вектор, який перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, то шуканий вектор $\vec{p}_0$ колінеарний до вектора $\vec{c}$. Знайдемо вектор $\vec{c}$.

$$\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 3 & 0\\ 2 & -3 & 6\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}3 & 0\\ -3 & 6\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 6\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -3\end{vmatrix}=18\vec{i}-6\vec{j}-9\vec{k}.$$

$$|\vec{c}|=\sqrt{18^2+(-6)^2+(-9)^2}=3\sqrt{36+4+9}=21;\ \vec{c}_0=\left(\frac{6}{7};-\frac{2}{7};-\frac{3}{7}\right).$$

$\vec{p}_0=\pm\vec{c}_0$. Отже, $\vec{p}_0=\left(\frac{6}{7};-\frac{2}{7};-\frac{3}{7}\right), \vec{p}\,'_0=\left(-\frac{6}{7};\frac{2}{7};\frac{3}{7}\right).$

Задача 5. Знайти об'єм тетраедра, заданого вершинами $A(2;-1;0)$, $B(5;5;3)$, $C(3;2;-2)$, $D(4;1;2)$.

Розв'язання. Відомо, що об'єм тетраедра V_{ABCD}, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, дорівнює шостій частині об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах. Тому за формулою $V = \left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$ маємо

$$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right|.$$

Знаходимо вектори $\overrightarrow{AB} = (3;6;3)$, $\overrightarrow{AC} = (1;3;-2)$, $\overrightarrow{AD} = (2;2;2)$. За формулою $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$ одержимо

$$V = 1/6\left|\begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}\right| = 3.$$

Задача 6. Визначити, при якому значенні λ вектори $\vec{a} = (\lambda;7;-1)$, $\vec{b} = (2;\lambda;1)$, $\vec{c} = (-2;-5;-4)$ компланарні.

Розв'язання. Застосуємо умову компланарності векторів:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 7 & -1 \\ 2 & \lambda & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$ звідки отримаємо:

$$-4\lambda^2 - 14 + 10 - 2\lambda + 56 + 3\lambda = 0,$$

тобто

$$4\lambda^2 - 3\lambda - 52 = 0.$$

Оскільки дискримінант $D = 9 + 16\cdot 52 = 841 > 0$, то рівняння має два дійсних корені, а саме: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -\frac{13}{4}$.

Задача 7. Довести, що точки $A(0;1;2)$, $B(-2;0;-1)$, $C(-1;5;8)$, $D(1;6;11)$ лежать в одній площині.

Розв'язання. Точки A, B, C, D лежать в одній площині, якщо вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ компланарні. Знаходимо вектори $\overrightarrow{AB}=(-2;-1;-3)$, $\overrightarrow{AC}=(-1;4;6)$, $\overrightarrow{AD}=(1;5;9)$.

Оскільки мішаний добуток

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix}=0,$$

то вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ компланарні, тому задані точки лежать в одній площині.

Задача 8. Яку трійку утворюють вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, якщо $\vec{a}=(1;2;3)$, $\vec{b}=(-1;0;2)$, $\vec{c}=(1;-2;5)$?

Розв'язання. Оскільки мішаний добуток

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix}=24>0,$$

то дані вектори утворюють праву трійку.

Завдання розрахункової роботи

ВАРІАНТ 1

1. Знайти координати вектора $\vec{a}$, якщо відома його довжина і кути α, β, γ, які утворює вектор $\vec{a}$ з осями координат: $|\vec{a}| = 2.1, \quad \alpha = \pi/3, \quad \beta = 4\pi/3$.
2. Паралелограм $ABCD$ побудовано на векторах $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, O – точка перетину діагоналей, K – середина BC. Знайти вектори $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CO}$ і $\overrightarrow{KD}$, якщо:
$$\vec{a} = (2;3;-1), \quad \vec{b} = (4;0;2).$$
3. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ прикладені до однієї точки. Знайти одиничний вектор $\vec{c_0}$, напрямлений по бісектрисі кута, утвореного векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо відомо:
$$\vec{a} = (-3;0;4), \quad \vec{b} = \left(1;3;-3\sqrt{10}\right).$$
4. Дано точки A, B, C. При яких значеннях α і β точка C лежить на прямій AB, якщо:
$$A(1;2;1),\ B(2;-1;3),\ C(3;\alpha;\beta).$$
5. Задано чотири вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ в деякому базисі. Показати, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі, якщо:
$$\vec{a} = (2;1;0), \quad \vec{b} = (4;3;-3), \quad \vec{c} = (-6;5;7), \quad \vec{d} = (34;5;-26).$$
6. Знайти косинус внутрішнього кута A трикутника ABC, якщо задано координати його вершин:
$$A(2;-1;3),\ B(1;1;1),\ C(0;0;5).$$
7. Обчислити довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:
$$\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}, \quad \vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}, \quad |\vec{p}| = 2\sqrt{2}, \quad |\vec{q}| = 3, \quad \left(\vec{p}, \hat{\ } \vec{q}\right) = \pi/4.$$
8. Знайти вектор $\vec{p}$, перпендикулярний до вектора $\vec{q}$, при умові , що їх довжини однакові і $\vec{q} = (1;-4;-3)$, $\left(\vec{p}, \hat{\ } \vec{i}\right) = \pi/2$.

9. Знайти роботу A сили $\vec{f}$ по переміщенню матеріальної точки з положення M_1 в положення M_2 вздовж прямої M_1M_2, якщо:

$$\vec{f}=(2;3;-1),\quad M_1(0;4;-1),\quad M_2(3;1;2).$$

10. Знайти одиничний вектор $\overrightarrow{p_0}$, перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, заданих своїми координатами:

$$\vec{a}=(2;1;-4),\quad \vec{b}=(1;3;5).$$

11. Обчислити площу трикутника ABC і довжину висоти AH, якщо:

A(2;0;-1), B(3;1;-4), C(2;0;5).

12. Знайти модуль векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо відомо:

$$\vec{a}=2\vec{p}+\vec{q},\quad \vec{b}=\vec{p}+3\vec{q},\quad |\vec{p}|=4,\quad |\vec{q}|=1,\quad \left(\vec{p},\hat{\ }\,\vec{q}\right)=\pi/6.$$

13. Три сили $\overrightarrow{f_1},\overrightarrow{f_2}$ і $\overrightarrow{f_3}$ прикладені до точки B. Обчислити момент рівнодійної цих сил $\vec{F}$ відносно початку координат, якщо:

$$\overrightarrow{f_1}=(2;4;-1),\quad \overrightarrow{f_2}=(0;0;-3),\quad \overrightarrow{f_3}=(-4;1;7),\quad B(2;1;-2).$$

14. Точки A, B, C і D є вершинами чотирикутника. Довести, що цей чотирикутник – плоский, якщо:

A(2;3;-1), B(4;0;2), C(2;3;-1), D(8;-6;8).

15. Обчислити об'єм тетраедра, вершинами якого є точки A, B, C, D, якщо:

A(3;3;3), B(2;9;0), C(1;5;6), D(7;6;4).

ВАРІАНТ 2

1. Знайти координати вектора $\vec{a}$, якщо відома його довжина і кути α, β, γ, які утворює вектор $\vec{a}$ з осями координат: $|\vec{a}|=6$, $\alpha=\pi/2$, $\beta=\pi/4$.
2. Паралелограм $ABCD$ побудовано на векторах $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, O – точка перетину діагоналей, K – середина BC. Знайти вектори $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CO}$ і $\overrightarrow{KD}$, якщо:
$$\vec{a}=(0;1;3),\quad \vec{b}=(-1;2;4).$$
3. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ прикладені до однієї точки. Знайти одиничний вектор $\overrightarrow{c_0}$, напрямлений по бісектрисі кута, утвореного векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо відомо:
$$\vec{a}=\left(3;-4;5\sqrt{3}\right),\quad \vec{b}=(2;3;-6).$$
4. Дано точки A, B, C. При яких значеннях α і β точка C лежить на прямій AB, якщо:
$$A(0;0;2),\ B(3;4;-1),\ C(\alpha;2;\beta).$$
5. Задано чотири вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ в деякому базисі. Показати, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі, якщо:
$$\vec{a}=(1;2;3),\quad \vec{b}=(-1;3;2),\quad \vec{c}=(7;-3;5),\quad \vec{d}=(6;10;17).$$
6. Знайти косинус внутрішнього кута A трикутника ABC, якщо задано координати його вершин:
$$A(-1;0;4),\ B(2;1;-3),\ C(2;-1;1).$$
7. Обчислити довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:
$$\vec{a}=\vec{p}-3\vec{q},\quad \vec{b}=2\vec{p}+5\vec{q},\quad |\vec{p}|=4,\quad |\vec{q}|=3,\quad \left(\vec{p},\hat{\ }\vec{q}\right)=4\pi/3.$$
8. Знайти вектор $\vec{p}$, перпендикулярний до вектора $\vec{q}$, при умові , що їх довжини однакові і $\vec{q}=(-5;3;12)$, $\left(\vec{p},\hat{\ }\vec{j}\right)=\pi/2$.
9. Знайти роботу A сили $\vec{f}$ по переміщенню матеріальної точки з положення M_1 в положення M_2 вздовж прямої M_1M_2, якщо:
$$\vec{f}=(0;3;4),\quad M_1(2;1;1),\quad M_2(4;3;0).$$

10. Знайти одиничний вектор $\overrightarrow{p_0}$, перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, заданих своїми координатами:

$$\vec{a} = (7;2;3), \quad \vec{b} = (8;0;-6).$$

11. Обчислити площу трикутника ABC і довжину висоти AH, якщо:

A(3;7;-2), B(0;1;1), C(3;1;-4).

12. Знайти модуль векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо відомо:

$$\vec{a} = 3\vec{p} + \vec{q}, \quad \vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}, \quad |\vec{p}| = 2, \quad |\vec{q}| = 3, \quad \left(\vec{p}, \hat{\ } \vec{q}\right) = \pi/4.$$

13. Три сили $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}$ і $\overrightarrow{f_3}$ прикладені до точки B. Обчислити момент рівнодійної цих сил $\vec{F}$ відносно початку координат, якщо:

$$\overrightarrow{f_1} = (2;0;-1), \quad \overrightarrow{f_2} = (4;5;2), \quad \overrightarrow{f_3} = (3;1;-3), \quad B(4;1;4).$$

14. Точки A, B, C і D є вершинами чотирикутника. Довести, що цей чотирикутник – плоский, якщо:

A(2;0;-1), B(3;1;-2), C(5;7;1), D(5;3;-4).

15. Обчислити об'єм тетраедра, вершинами якого є точки A, B, C, D, якщо:

A(4;4;3), B(10;1;6), C(7;8;7), D(2;-2;1).

ВАРІАНТ 3

1. Знайти координати вектора $\vec{a}$, якщо відома його довжина і кути α, β, γ, які утворює вектор $\vec{a}$ з осями координат: $\left|\vec{a}\right| = 9$, $\alpha = \beta = \gamma$ (кути гострі).
2. Паралелограм $ABCD$ побудовано на векторах $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, O – точка перетину діагоналей, K – середина BC. Знайти вектори $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CO}$ і $\overrightarrow{KD}$, якщо:
$$\vec{a} = (2;4;5), \quad \vec{b} = (-2;-1;0).$$
3. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ прикладені до однієї точки. Знайти одиничний вектор $\vec{c_0}$, напрямлений по бісектрисі кута, утвореного векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо відомо:
$$\vec{a} = \left(3\sqrt{10};-3;-1\right), \quad \vec{b} = \left(-3;-4;2\sqrt{6}\right).$$
4. Дано точки А, В, С. При яких значеннях α і β точка С лежить на прямій АВ, якщо:
А(-1;2;4), В(2;0;-3), С(α;β;-1).
5. Задано чотири вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ в деякому базисі. Показати, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі, якщо:
$$\vec{a} = (4;7;8), \quad \vec{b} = (9;1;3), \quad \vec{c} = (2;-4;1), \quad \vec{d} = (1;-13;-13).$$
6. Знайти косинус внутрішнього кута А трикутника АВС, якщо задано координати вершин:
А(2;4;-1), В(0;3;-2), С(4;1;-1).
7. Обчислити довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:
$$\vec{a} = 2\vec{p} + 7\vec{q}, \quad \vec{b} = -3\vec{p} + \vec{q}, \quad \left|\vec{p}\right| = 2\sqrt{2}, \quad \left|\vec{q}\right| = 4, \quad \left(\vec{p}, \widehat{\ } \vec{q}\right) = 3\pi/4.$$
8. Знайти вектор $\vec{p}$, перпендикулярний до вектора $\vec{q}$, при умові , що їх довжини однакові і $\vec{q} = (2;1;-2)$, $\left(\vec{p}, \widehat{\ } \vec{k}\right) = \pi/2$.
9. Знайти роботу А сили $\vec{f}$ по переміщенню матеріальної точки з положення M_1 в положення M_2 вздовж прямої M_1M_2, якщо:
$$\vec{f} = (7;1;-1), \quad M_1(0;3;4), \quad M_2(7;-1;-1).$$

10. Знайти одиничний вектор $\overrightarrow{p_0}$, перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, заданих своїми координатами:

$$\vec{a} = (3;0;1), \quad \vec{b} = (4;6;-1).$$

11. Обчислити площу трикутника ABC і довжину висоти AH, якщо:

A(3;1;-1), B(2;5;-1), C(2;1;8).

12. Знайти модуль векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо відомо:

$$\vec{a} = 3\vec{p} - 2\vec{q}, \quad \vec{b} = \vec{p} + 5\vec{q}, \quad |\vec{p}| = 4, \quad |\vec{q}| = 1/2, \quad \left(\vec{p}, \hat{\ } \vec{q}\right) = \pi/2.$$

13. Три сили $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}$ і $\overrightarrow{f_3}$ прикладені до точки B. Обчислити момент рівнодійної цих сил $\vec{F}$ відносно початку координат, якщо:

$$\overrightarrow{f_1} = (3;1;2), \quad \overrightarrow{f_2} = (4;-1;-4), \quad \overrightarrow{f_3} = (2;4;0), \quad B(7;1;-3).$$

14. Точки A, B, C і D є вершинами чотирикутника. Довести, що цей чотирикутник – плоский, якщо:

A(1;-1;2), B(4;0;2), C(5;-1;7), D(10;2;2).

15. Обчислити об'єм тетраедра, вершинами якого є точки A, B, C, D, якщо:

A(3;-2;1), B(-2;-1;6), C(-1;6;5), D(7;3;4).

ВАРІАНТ 4

1. Знайти координати вектора $\vec{a}$, якщо відома його довжина і кути α, β, γ, які утворює вектор $\vec{a}$ з осями координат: $\left|\vec{a}\right| = 13$, $\alpha = \beta = \gamma$ (кути тупі).
2. В трикутнику ABC точка M – середина відрізка AB і O – точка перетину медіан. Знайти координати векторів $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AO}$ і $\overrightarrow{MO}$, якщо:
$$\overrightarrow{AB} = (2;-1;2), \quad \overrightarrow{AC} = (3;1;7).$$
3. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ прикладені до однієї точки. Знайти одиничний вектор $\overrightarrow{c_0}$, напрямлений по бісектрисі кута, утвореного векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо відомо:
$$\vec{a} = (0;-6;8), \quad \vec{b} = (2;-3;6).$$
4. Дано точки A, B, C. При яких значеннях α і β точка C лежить на прямій AB, якщо:
$$A(1;0;7), \; B(3;2;6), \; C(\alpha;4;\beta).$$
5. Задано чотири вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ в деякому базисі. Показати, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі, якщо:
$$\vec{a} = (8;2;3), \quad \vec{b} = (4;6;10), \quad \vec{c} = (3;-2;1), \quad \vec{d} = (7;4;11).$$
6. Знайти косинус внутрішнього кута A трикутника ABC, якщо задано координати вершин:
$$A(2;-3;0), \; B(0;9;-6), \; C(3;1;-2).$$
7. Обчислити довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:
$$\vec{a} = \vec{p} + 4\vec{q}, \quad \vec{b} = \vec{p} - \vec{q}, \quad \left|\vec{p}\right| = 2, \quad \left|\vec{q}\right| = 5, \quad \left(\vec{p}, \widehat{\ } \vec{q}\right) = 2\pi/3.$$
8. Знайти вектор $\vec{p}$, перпендикулярний до вектора $\vec{q}$, при умові , що їх довжини однакові і $\vec{q} = (1;2;-3)$, $\left(\vec{p}, \widehat{\ } \vec{j}\right) = \pi/2$.
9. Знайти роботу A сили $\vec{f}$ по переміщенню матеріальної точки з положення M_1 в положення M_2 вздовж прямої M_1M_2, якщо:
$$\vec{f} = (6;4;3), \quad M_1(2;-1;2), \quad M_2(7;6;4).$$
10. Знайти одиничний вектор $\overrightarrow{p_0}$, перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, заданих своїми координатами:
$$\vec{a} = (4;1;-1), \quad \vec{b} = (3;0;1).$$

11. Обчислити площу трикутника ABC і довжину висоти AH, якщо:

A(2;-3;7), B(0;5;3), C(2;1;-1).

12. Знайти модуль векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо відомо:

$$\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}, \quad \vec{b} = 2\vec{p} + 3\vec{q}, \quad \left|\vec{p}\right| = 2, \quad \left|\vec{q}\right| = 3\sqrt{2}, \quad \left(\vec{p}, \hat{\ } \vec{q}\right) = 3\pi/4.$$

13. Три сили $\vec{f_1}, \vec{f_2}$ і $\vec{f_3}$ прикладені до точки B. Обчислити момент рівнодійної цих сил $\vec{F}$ відносно початку координат, якщо:

$\vec{f_1} = (4;6;0)$, $\vec{f_2} = (1;2;8)$, $\vec{f_3} = (3;-1;2)$, B(7;1;6).

14. Точки A, B, C і D є вершинами чотирикутника. Довести, що цей чотирикутник – плоский, якщо:

A(-2;1;-3), B(1;-1;3), C(0;2;-1), D(-8;5;-15).

15. Обчислити об'єм тетраедра, вершинами якого є точки A, B, C, D, якщо:

A(3;4;-9), B(5;0;4), C(6;8;2), D(-2;5;4).

ВАРІАНТ 5

1. Знайти координати вектора $\vec{a}$, якщо відома його довжина і кути α, β, γ, які утворює вектор $\vec{a}$ з осями координат: $|\vec{a}| = 15.5$, $\beta = \pi/4$, $\gamma = \pi/3$.
2. В трикутнику ABC точка M – середина відрізка AB і O – точка перетину медіан. Знайти координати векторів $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AO}$ і $\overrightarrow{MO}$, якщо:
$$\overrightarrow{AB} = (0;-2;1), \quad \overrightarrow{AC} = (3;-2;-2).$$
3. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ прикладені до однієї точки. Знайти одиничний вектор $\overrightarrow{c_0}$, напрямлений по бісектрисі кута, утвореного векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо відомо:
$$\vec{a} = \left(3;-4;-5\sqrt{3}\right), \quad \vec{b} = \left(2\sqrt{6};-4;-3\right).$$
4. Дано точки A, B, C. При яких значеннях α і β точка C лежить на прямій AB, якщо:
$$A(2;1;-1), \; B(3;0;3), \; C(6;\alpha;\beta).$$
5. Задано чотири вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ в деякому базисі. Показати, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі, якщо:
$$\vec{a} = (10;3;1), \quad \vec{b} = (1;4;2), \quad \vec{c} = (3;9;2), \quad \vec{d} = (19;30;7).$$
6. Знайти косинус внутрішнього кута A трикутника ABC, якщо задано координати вершин:
$$A(4;-2;1), \; B(3;0;5), \; C(2;1;-4).$$
7. Обчислити довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:
$$\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}, \quad \vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q}, \quad |\vec{p}| = 2\sqrt{3}, \quad |\vec{q}| = 1/2, \quad \left(\vec{p}, \hat{\ } \vec{q}\right) = \pi/6.$$
8. Знайти вектор $\vec{p}$, перпендикулярний до вектора $\vec{q}$, при умові , що їх довжини однакові і $\vec{q} = (2;-3;6)$, $\left(\vec{p}, \hat{\ } \vec{i}\right) = \pi/2$.
9. Знайти роботу A сили $\vec{f}$ по переміщенню матеріальної точки з положення M_1 в положення M_2 вздовж прямої M_1M_2, якщо:
$$\vec{f} = (3;1;-7), \quad M_1(2;3;-1), \quad M_2(5;4;5).$$
10. Знайти одиничний вектор $\overrightarrow{p_0}$, перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, заданих своїми координатами:

$$\vec{a}=(8;6;3), \quad \vec{b}=(2;4;7).$$

11.Обчислити площу трикутника ABC і довжину висоти AH, якщо:

A(3;4;5), B(5;6;1), C(10;4;6).

12.Знайти модуль векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо відомо:

$$\vec{a}=\vec{p}-4\vec{q}, \quad \vec{b}=3\vec{p}+\vec{q}, \quad |\vec{p}|=1, \quad |\vec{q}|=2, \quad \left(\vec{p}, \hat{\ } \vec{q}\right)=\pi/6.$$

13.Три сили $\vec{f_1}, \vec{f_2}$ і $\vec{f_3}$ прикладені до точки B. Обчислити момент рівнодійної цих сил $\vec{F}$ відносно початку координат, якщо:

$$\vec{f_1}=(3;2;-1), \quad \vec{f_2}=(2;3;-3), \quad \vec{f_3}=(4;1;-3), \quad B(0;2;-2).$$

14.Точки A, B, C і D є вершинами чотирикутника. Довести, що цей чотирикутник – плоский, якщо:

A(2;1;0), B(4;1;-2), C(0;0;5), D(-2;1;4).

15.Обчислити об'єм тетраедра, вершинами якого є точки A, B, C, D, якщо:

A(5;10;6), B(-2;0;2), C(1;0;0), D(3;2;5).

ВАРІАНТ 6

1. Знайти координати вектора $\vec{a}$, якщо відома його довжина і кути α, β, γ, які утворює вектор $\vec{a}$ з осями координат: $\left|\vec{a}\right| = 17$, $\beta = \pi/2$, $\gamma = 7\pi/6$.
2. В трикутнику ABC точка M – середина відрізка AB і O – точка перетину медіан. Знайти координати векторів $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AO}$ і $\overrightarrow{MO}$, якщо:
$$\overrightarrow{AB} = (5;7;0), \quad \overrightarrow{AC} = (-4;1;1).$$
3. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ прикладені до однієї точки. Знайти одиничний вектор $\overrightarrow{c_0}$, напрямлений по бісектрисі кута, утвореного векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо відомо:
$$\vec{a} = \left(-3;-1;3\sqrt{10}\right), \quad \vec{b} = \left(1;-3;\sqrt{6}\right).$$
4. Дано точки A, B, C. При яких значеннях α і β точка C лежить на прямій AB, якщо:
A(3;-2;1), B(4;-2;-1), C(α;β;2).
5. Задано чотири вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ в деякому базисі. Показати, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі, якщо:
$$\vec{a} = (2;4;1), \quad \vec{b} = (1;3;6), \quad \vec{c} = (5;3;1), \quad \vec{d} = (24;20;6).$$
6. Знайти косинус внутрішнього кута A трикутника ABC, якщо задано координати вершин:
A(2;0;2), B(6;7;1), C(2;0;-3).
7. Обчислити довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:
$$\vec{a} = 3\vec{p} + 4\vec{q}, \quad \vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}, \quad \left|\vec{p}\right| = 3, \quad \left|\vec{q}\right| = \sqrt{2}, \quad \left(\vec{p}, \widehat{\ } \vec{q}\right) = 5\pi/4.$$
8. Знайти вектор $\vec{p}$, перпендикулярний до вектора $\vec{q}$, при умові , що їх довжини однакові і $\vec{q} = (3;4;-1)$, $\left(\vec{p}, \widehat{\ } \vec{k}\right) = \pi/2$.
9. Знайти роботу A сили $\vec{f}$ по переміщенню матеріальної точки з положення M_1 в положення M_2 вздовж прямої M_1M_2, якщо:
$$\vec{f} = (0;3;-2), \quad M_1(2;-3;0), \quad M_2(4;6;7).$$
10. Знайти одиничний вектор $\overrightarrow{p_0}$, перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, заданих своїми координатами:

$$\vec{a}=(7;5;5),\quad \vec{b}=(3;10;5).$$

11.Обчислити площу трикутника ABC і довжину висоти AH, якщо:

A(3;1;-1), B(2;-2;4), C(5;-5;3).

12.Знайти модуль векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо відомо:

$$\vec{a}=4\vec{p}+\vec{q},\quad \vec{b}=\vec{p}-\vec{q},\quad |\vec{p}|=7,\quad |\vec{q}|=2,\quad \left(\vec{p},\hat{\ }\vec{q}\right)=\pi/4.$$

13.Три сили $\vec{f_1},\vec{f_2}$ і $\vec{f_3}$ прикладені до точки B. Обчислити момент рівнодійної цих сил $\vec{F}$ відносно початку координат, якщо:

$$\vec{f_1}=(2;0;2),\quad \vec{f_2}=(3;0;1),\quad \vec{f_3}=(-3;-1;0),\quad B(5;1;5).$$

14.Точки A, B, C і D є вершинами чотирикутника. Довести, що цей чотирикутник – плоский, якщо:

A(2;4;4), B(-1;3;0), C(2;1;-2), D(8;6;12).

15.Обчислити об'єм тетраедра, вершинами якого є точки A, B, C, D, якщо:

A(-5;-1;1), B(4;5;4), C(3;4;4), D(2;0;2).

ВАРІАНТ 7

1. Знайти координати вектора $\vec{a}$, якщо відома його довжина і кути α, β, γ, які утворює вектор $\vec{a}$ з осями координат: $|\vec{a}| = 2$, $\beta = 3\pi/2$, $\gamma = 3\pi/4$.
2. В трикутнику ABC проведено медіани AD, BE і CF. Знайти координати векторів $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ і $\overrightarrow{CF}$, якщо:
$$\overrightarrow{AB} = (2;0;5), \quad \overrightarrow{AC} = (3;-1;-1).$$
3. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ прикладені до однієї точки. Знайти одиничний вектор $\overrightarrow{c_0}$, напрямлений по бісектрисі кута, утвореного векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо відомо:
$$\vec{a} = \left(2\sqrt{2}; 4; -5\right), \quad \vec{b} = \left(-9; -5; \sqrt{15}\right).$$
4. Дано точки A, B, C. При яких значеннях α і β точка C лежить на прямій AB, якщо:
$$A(2;4;1),\ B(3;0;2),\ C(\alpha;-1;\beta).$$
5. Задано чотири вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ в деякому базисі. Показати, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі, якщо:
$$\vec{a} = (1;7;3), \quad \vec{b} = (3;4;2), \quad \vec{c} = (4;8;5), \quad \vec{d} = (7;32;14).$$
6. Знайти косинус внутрішнього кута A трикутника ABC, якщо задано координати вершин:
$$A(3;1;-4),\ B(1;2;3),\ C(0;2;1).$$
7. Обчислити довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:
$$\vec{a} = \vec{p} + 6\vec{q}, \quad \vec{b} = 4\vec{p} - 2\vec{q}, \quad |\vec{p}| = 2, \quad |\vec{q}| = 4, \quad \left(\vec{p}, \widehat{\ }\ \vec{q}\right) = \pi/2.$$
8. Знайти вектор $\vec{p}$, перпендикулярний до вектора $\vec{q}$, при умові , що їх довжини однакові і $\vec{q} = (-1;2;3)$, $\left(\vec{p}, \widehat{\ }\ \vec{j}\right) = \pi/2$.
9. Знайти роботу A сили $\vec{f}$ по переміщенню матеріальної точки з положення M_1 в положення M_2 вздовж прямої M_1M_2, якщо:
$$\vec{f} = (2;-2;7), \quad M_1(2;-4;7), \quad M_2(-4;4;8).$$
10. Знайти одиничний вектор $\overrightarrow{p_0}$, перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, заданих своїми координатами:

$$\vec{a}=(0;4;7), \quad \vec{b}=(-2;3;5).$$

11.Обчислити площу трикутника ABC і довжину висоти AH, якщо:

A(5;-5;1), B(0;3;-2), C(7;2;1).

12.Знайти модуль векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо відомо:

$$\vec{a}=10\vec{p}+\vec{q}, \quad \vec{b}=3\vec{p}-2\vec{q}, \quad |\vec{p}|=4, \quad |\vec{q}|=1, \quad \left(\vec{p},\,\hat{}\,\vec{q}\right)=\pi/6.$$

13.Три сили $\vec{f_1}, \vec{f_2}$ і $\vec{f_3}$ прикладені до точки B. Обчислити момент рівнодійної цих сил $\vec{F}$ відносно початку координат, якщо:

$$\vec{f_1}=(3;-1;2), \quad \vec{f_2}=(3;1;3), \quad \vec{f_3}=(4;1;-4), \quad B(7;1;-7).$$

14.Точки A, B, C і D є вершинами чотирикутника. Довести, що цей чотирикутник – плоский, якщо:

A(1;1;-1), B(5;4;0), C(3;-3;2), D(-3;-2;-2).

15.Обчислити об'єм тетраедра, вершинами якого є точки A, B, C, D, якщо:

A(2;5;-6), B(5;4;5), C(5;3;-3), D(0;8;6).

ВАРІАНТ 8

1. Знайти координати вектора $\vec{a}$, якщо відома його довжина і кути α, β, γ, які утворює вектор $\vec{a}$ з осями координат: $\left|\vec{a}\right| = 3.2$, $\beta = 3\pi/2$, $\gamma = \pi/6$.
2. В трикутнику ABC проведено медіани *AD*, *BE* і *CF*. Знайти координати векторів $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ і $\overrightarrow{CF}$, якщо:
$$\overrightarrow{AB} = (3;1;-1), \quad \overrightarrow{AC} = (-2;1;0).$$
3. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ прикладені до однієї точки. Знайти одиничний вектор $\overrightarrow{c_0}$, напрямлений по бісектрисі кута, утвореного векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо відомо:
$$\vec{a} = (-6;0;8), \quad \vec{b} = \left(-3;1;\sqrt{6}\right).$$
4. Дано точки A, B, C. При яких значеннях α і β точка C лежить на прямій AB, якщо:
$$A(3;1;2),\ B(4;2;-1),\ C(\alpha;\beta;0).$$
5. Задано чотири вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ в деякому базисі. Показати, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі, якщо:
$$\vec{a} = (1;-2;3), \quad \vec{b} = (4;7;2), \quad \vec{c} = (6;4;2), \quad \vec{d} = (14;18;6).$$
6. Знайти косинус внутрішнього кута A трикутника ABC, якщо задано координати вершин:
$$A(7;-1;1),\ B(-1;4;3),\ C(2;-1;3).$$
7. Обчислити довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:
$$\vec{a} = 8\vec{p} + 3\vec{q}, \quad \vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}, \quad \left|\vec{p}\right| = 1/2, \quad \left|\vec{q}\right| = 4\sqrt{3}, \quad \left(\vec{p},\ \hat{}\ \vec{q}\right) = 5\pi/6.$$
8. Задано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Знайти значення p, при якому вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ будуть перпендикулярні, якщо :
$$\vec{a} = (3;2;p), \quad \vec{b} = (-4;p;3).$$
9. Знайти роботу A сили $\vec{f}$ по переміщенню матеріальної точки з положення M_1 в положення M_2 вздовж прямої M_1M_2, якщо:
$$\vec{f} = (7;2;2), \quad M_1(0;4;-3), \quad M_2(1;1;-2).$$
10. Знайти одиничний вектор $\overrightarrow{p_0}$, перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, заданих своїми координатами:

$$\vec{a}=(-2;10;3), \quad \vec{b}=(1;1;-1).$$

11. Обчислити площу трикутника ABC і довжину висоти AH, якщо:

A(2;-4;1), B(2;1;0), C(-3;-2;1).

12. Знайти модуль векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо відомо:

$$\vec{a}=6\vec{p}-\vec{q}, \quad \vec{b}=\vec{p}+2\vec{q}, \quad |\vec{p}|=4, \quad |\vec{q}|=1, \quad \left(\vec{p},\hat{\ }\vec{q}\right)=\pi/4.$$

13. Три сили $\vec{f_1}, \vec{f_2}$ і $\vec{f_3}$ прикладені до точки B. Обчислити момент рівнодійної цих сил $\vec{F}$ відносно початку координат, якщо:

$\vec{f_1}=(2;1;0)$, $\vec{f_2}=(3;1;-1)$, $\vec{f_3}=(5;1;-1)$, B(3;1;-3).

14. Точки A, B, C і D є вершинами чотирикутника. Довести, що цей чотирикутник – плоский, якщо:

A(3;-1;0), B(7;7;1), C(3;-2;-2), D(-1;-9;-1).

15. Обчислити об'єм тетраедра, вершинами якого є точки A, B, C, D, якщо:

A(3;6;-3), B(5;1;7), C(7;7;1), D(1;9;7).

ВАРІАНТ 9

1. Знайти координати вектора $\vec{a}$, якщо відома його довжина і кути α, β, γ, які утворює вектор $\vec{a}$ з осями координат: $\left|\vec{a}\right| = 21$, $\beta = {}^{7\pi}\!/_{6}$, $\gamma = {}^{\pi}\!/_{2}$.
2. В трикутнику ABC проведено медіани AD, BE і CF. Знайти координати векторів $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ і $\overrightarrow{CF}$, якщо:
$$\overrightarrow{AB} = (4;1;-1), \quad \overrightarrow{AC} = (7;6;0).$$
3. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ прикладені до однієї точки. Знайти одиничний вектор $\overrightarrow{c_0}$, напрямлений по бісектрисі кута, утвореного векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо відомо:
$$\vec{a} = (-4;-8;1), \quad \vec{b} = (-4;2;4).$$
4. Дано точки A, B, C. При яких значеннях α і β точка C лежить на прямій AB, якщо:
$$A(2;4;3),\ B(3;0;5),\ C(\alpha;\beta;6).$$
5. Задано чотири вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ в деякому базисі. Показати, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі, якщо:
$$\vec{a} = (1;4;3), \quad \vec{b} = (6;8;5), \quad \vec{c} = (3;1;4), \quad \vec{d} = (21;18;33).$$
6. Знайти косинус внутрішнього кута A трикутника ABC, якщо задано координати вершин:
$$A(10;-2;3),\ B(8;0;-3),\ C(2;-2;-2).$$
7. Обчислити довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:
$$\vec{a} = 4\vec{p} - 3\vec{q}, \quad \vec{b} = 4\vec{p} + 2\vec{q}, \quad \left|\vec{p}\right| = {}^{\sqrt{2}}\!/_{4}, \quad \left|\vec{q}\right| = 3, \quad \left(\vec{p}, \hat{\ } \vec{q}\right) = {}^{\pi}\!/_{4}.$$
8. Задано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Знайти значення p, при якому вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ будуть перпендикулярні, якщо :
$$\vec{a} = (p;4;1), \quad \vec{b} = (2;p;-4).$$
9. Знайти роботу A сили $\vec{f}$ по переміщенню матеріальної точки з положення M_1 в положення M_2 вздовж прямої M_1M_2, якщо:
$$\vec{f} = (10;3;3), \quad M_1(0;2;-2), \quad M_2(6;-4;5).$$
10. Знайти одиничний вектор $\overrightarrow{p_0}$, перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, заданих своїми координатами:

$$\vec{a}=(4;2;-1), \quad \vec{b}=(6;0;3).$$

11. Обчислити площу трикутника ABC і довжину висоти AH, якщо:

A(-4;2;0), B(5;-5;1), C(2;3;-2).

12. Знайти модуль векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо відомо:

$$\vec{a}=5\vec{p}-6\vec{q}, \quad \vec{b}=\vec{p}+\vec{q}, \quad |\vec{p}|=5, \quad |\vec{q}|=3, \quad \left(\vec{p}, \hat{\ } \vec{q}\right)=5\pi/6.$$

13. Три сили $\vec{f_1}, \vec{f_2}$ і $\vec{f_3}$ прикладені до точки B. Обчислити момент рівнодійної цих сил $\vec{F}$ відносно початку координат, якщо:

$$\vec{f_1}=(5;1;-2), \quad \vec{f_2}=(2;1;-1), \quad \vec{f_3}=(1;-1;3), \quad B(2;0;4).$$

14. Точки A, B, C і D є вершинами чотирикутника. Довести, що цей чотирикутник – плоский, якщо:

A(3;4;-1), B(2;1;-2), C(4;3;1), D(4;7;0).

15. Обчислити об'єм тетраедра, вершинами якого є точки A, B, C, D, якщо:

A(4;7;4), B(6;-2;8), C(8;3;3), D(3;-2;9).

ВАРІАНТ 10

1. Знайти координати вектора $\vec{a}$, якщо відома його довжина і кути α, β, γ, які утворює вектор $\vec{a}$ з осями координат: $|\vec{a}| = 5.5$, $\beta = \pi/2$, $\gamma = 5\pi/6$.
2. Точки K і L служать серединами сторін BC і CD паралелограма $ABCD$. Знайти вектори $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AK}$, якщо:
$$\overrightarrow{AB} = (2;-1;3), \quad \overrightarrow{AL} = (4;0;-7).$$
3. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ прикладені до однієї точки. Знайти одиничний вектор $\overrightarrow{c_0}$, напрямлений по бісектрисі кута, утвореного векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо відомо:
$$\vec{a} = \left(0;-5;5\sqrt{3}\right), \quad \vec{b} = (-4;1;8).$$
4. Дано точки A, B, C. При яких значеннях α і β точка C лежить на прямій AB, якщо:
$$A(3;-1;2),\ B(4;2;-3),\ C(2;\alpha;\beta).$$
5. Задано чотири вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ в деякому базисі. Показати, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі, якщо:
$$\vec{a} = (2;7;3), \quad \vec{b} = (3;1;8), \quad \vec{c} = (2;-7;4), \quad \vec{d} = (16;14;27).$$
6. Знайти косинус внутрішнього кута A трикутника ABC, якщо задано координати вершин:
$$A(-2;5;-1),\ B(0;4;-1),\ C(1;-1;3).$$
7. Обчислити довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:
$$\vec{a} = \vec{p} - 6\vec{q}, \quad \vec{b} = 5\vec{p} + \vec{q}, \quad |\vec{p}| = 3, \quad |\vec{q}| = 7, \quad \left(\vec{p}, \widehat{\ }\ \vec{q}\right) = \pi/2.$$
8. Задано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Знайти значення p, при якому вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ будуть перпендикулярні, якщо :
$$\vec{a} = (5;p;-2), \quad \vec{b} = (p;4;1).$$
9. Знайти роботу A сили $\vec{f}$ по переміщенню матеріальної точки з положення M_1 в положення M_2 вздовж прямої M_1M_2, якщо:
$$\vec{f} = (2;-3;4), \quad M_1(5;4;-3), \quad M_2(6;2;-1).$$
10. Знайти одиничний вектор $\overrightarrow{p_0}$, перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, заданих своїми координатами:

$$\vec{a} = (6;-4;3), \quad \vec{b} = (3;2;9).$$

11. Обчислити площу трикутника ABC і довжину висоти AH, якщо:

A(3;3;-3), B(1;-2;7), C(5;1;2).

12. Знайти модуль векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо відомо:

$$\vec{a} = 7\vec{p} - 2\vec{q}, \quad \vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}, \quad |\vec{p}| = 1/2, \quad |\vec{q}| = 2, \quad \left(\vec{p}, \hat{\ } \vec{q}\right) = \pi/2.$$

13. Три сили $\vec{f_1}, \vec{f_2}$ і $\vec{f_3}$ прикладені до точки B. Обчислити момент рівнодійної цих сил $\vec{F}$ відносно початку координат, якщо:

$$\vec{f_1} = (3;1;-1), \quad \vec{f_2} = (2;1;1), \quad \vec{f_3} = (4;0;-2), \quad \text{B(7;7;1).}$$

14. Точки A, B, C і D є вершинами чотирикутника. Довести, що цей чотирикутник – плоский, якщо:

A(1;-1;0), B(4;3;5), C(-5;1;-2), D(-2;-5;-5).

15. Обчислити об'єм тетраедра, вершинами якого є точки A, B, C, D, якщо:

A(0;5;6), B(7;3;3), C(2;9;0), D(5;6;7).